

## О ФРАКТАЛЬНОМ МЕХАНИЗМЕ ВЗАИМОСВЯЗИ МЕЖДУ ГЕНЕЗИСОМ, РАЗМЕРОМ И СОДЕРЖАНИЕМ АТМОСФЕРНЫХ АЭРОЗОЛЕЙ В РАЗЛИЧНЫХ РАЙОНАХ ЗЕМЛИ

В.Д. Русов<sup>1</sup>, В.Н. Павлович<sup>2</sup>, Р. Илич<sup>3</sup>, Р. Ячимович<sup>3</sup>, Ю.А. Бондарчук<sup>1</sup>,  
В.Н. Ващенко<sup>4</sup>, О.Т. Михалус<sup>1</sup>, С.Л. Косенко<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Национальный политехнический университет, Одесса, Украина

<sup>2</sup>Институт ядерных исследований, Киев, Украина;

<sup>3</sup>J.Stefan Institute, Ljubljana, Slovenia;

<sup>4</sup>Киевский национальный университет им. Т.Г.Шевченко, Украина

Обсуждаются экспериментальные данные Национальной Сети Мониторинга Воздуха (NASN) Японии с 1974 по 1996 гг. и независимые эксперименты, проведенные одновременно в районах Любляны (Словения), Одессы (Украина) и Украинской антарктической станции “Академик Вернадский” (64°15'; 65°15'), в которых с помощью традиционного метода фиксации атмосферных аэрозолей на ядерных фильтрах и  $K_0$ -инструментального нейтронно-активационного анализа определялся концентрационный состав атмосферного воздуха.

Сравнительный анализ различных пар экспериментальных спектров нормированных концентраций элементов атмосферного аэрозоля, измеренных в различных регионах Земли, обнаруживает устойчивую линейную (в логарифмическом масштабе) корреляционную зависимость, что указывает на степенной рост массы (объема) каждого из элементов атмосферного аэрозоля и одновременно на причину этого роста – фрактальную природу генезиса атмосферных (вторичных) аэрозолей.

В рамках мультифрактальной геометрии показано, что распределение изотопных компонент вторичного аэрозоля по нормированным массам (объемам) подчиняется логнормальному распределению, которое в логарифмическом масштабе относительно случайной переменной (массы изотопной компоненты) тождественно нормальному распределению. Последнее означает, что параметры двумерного нормального распределения относительно соответствующих изотопных компонент аэрозольных частиц-мультифракталов, измеренных в различных местах, априори связаны уравнениями прямой и обратной линейной регрессии.

Показано, что следствием таких линейных регрессий являются наблюдаемая в экспериментах линейная (в логарифмическом масштабе) корреляция между нормированными концентрациями одинаковых изотопных компонент различных по месту регистрации экспериментальных спектров нормированных концентраций элементов атмосферного аэрозоля.

Теоретически показано, как с помощью решения системы нелинейных уравнений, объединяющей первые моменты (среднее и дисперсию) логнормального и нормального распределений, восстановить мультифрактальную функцию  $f(\alpha)$  и спектр фрактальных размерностей  $D_q$  отдельной аэрозольной частицы, которые являются глобальными характеристиками генезиса атмосферного (вторичного) аэрозоля и не зависят от локального места регистрации.

## 1. Введение

Анализ концентрационного спектра элементов Земной коры, антропогенных и морских элементов, используемого для определения различных уровней аэрозольного загрязнения атмосферы, указывает на тот значительный факт, что элементный состав атмосферного аэрозоля на двух крайних уровнях – Южном полюсе [1] и континентальных фоновых станциях [2] – практически одинаков. Различие между ними состоит в том, что средние концентрации элементов в атмосфере на континентальных фоновых станциях ( $C_{CB}$ ), расположенных в различных районах Земли, превышают аналогичные концентрации  $C_{SP}$  на Южном полюсе в  $20-1 \cdot 10^3$  раз.

При сравнении концентраций одних и тех же элементов атмосферного аэрозоля из выборок  $\{C_{SP}^i\}$  и  $\{C_{CB}^i\}$  оказалось, что зависимость средних концентраций любого элемента из выборок  $\{C_{SP}^i\}$  или  $\{C_{CB}^i\}$  в логарифмическом масштабе хорошо описывается линейной зависимостью для любого элемента из данной пары выборок:

$$\ln C_{CB}^i = a_{CB-SP} + b_{CB-SP} \ln C_{SP}^i. \quad (1)$$

где

$$a_{CB-SP} = \ln \langle C_{CB}^i \rangle / \langle C_{SP}^i \rangle^{b_{CB-SP}}, \quad b_{CB-SP} = r \sigma_{CB} / \sigma_{SP} \approx 1, \quad (2)$$

где  $a_{CB-SP}$  и  $b_{CB-SP}$  – соответственно интерсепт и наклон (коэффициент регрессии) линии регрессии,  $r$  – коэффициент корреляции,  $\sigma_{CB}$  и  $\sigma_{SP}$  – стандартные отклонения изотопных последовательностей  $\{C_{SP}^i\}$  и  $\{C_{CB}^i\}$ .

Этот уникальный и весьма неожиданный результат впервые обнаружили Пушкин и Михайлов [2]. При этом, согласно Пушкину и Михайлову [2], природа сильного обогащения теми элементами атмосферного аэрозоля, которые выпадают из линейной зависимости, связана в большинстве случаев либо с антропогенным вкладом (Sb, Pb, Zn, Cd, As, Hg), либо с близостью океана или моря, которые являются мощными источниками компонент морского аэрозоля – Na, I, Br, Se, S и Hg.

Однако наши многочисленные экспериментальные исследования настойчиво указывают на то, что зависимость Пушкина–Михайлова (1) в действительности является частным случаем (при  $b_{12}=1$ ) более общего уравнения прямой линии регрессии:

$$\ln(C_{1i}/\rho_i) = a_{12} + b_{12} \ln(C_{2i}/\rho_i), \quad a_{12} = \ln \left[ \frac{\langle C_{1i}/\rho_i \rangle}{\langle C_{2i}/\rho_i \rangle^{b_{12}}} \right], \quad b_{12} = r \frac{\sigma_1}{\sigma_2}. \quad (3)$$

где  $C_i$  и  $\rho_i$  – концентрация и удельная плотность  $i$ -й изотопной компоненты в аэрозольной частице, измеренной в разных регионах (индексы 1 и 2) Земли.

Очевидно, что если будет доказано, что линейная зависимость (3) между указанными выборками является отражением более общей фундаментальной зависимости, то она может быть использована для экспериментального и теоретического сравнения естественных атмосферных аэрозолей любых регионов Земли. Более того, установленная линейная зависимость типа (3) может стать хорошим индикатором для тех элементов, которые определяют техногенный уровень запыленности атмосферы, и тем самым стать основой метода определения стандарта чистого воздуха, или, другими словами, стандарта естественного уровня запыленности атмосферы различных пригородных зон. Интересно, что на фундаментальный характер линейной регрессии между любыми выборками указывает также степенной характер выражения (3), который предопределяет тот факт, что

общий генезис не техногенных, но естественных атмосферных аэрозолей, по-видимому, не зависит от географии места образования, характеризуемой термодинамическими параметрами среды, и имеет фрактальную природу.

По нашему мнению, это не противоречит современным представлениям о микрофизике образования и эволюции аэрозоля [3], если рассматривать фрактальную структуру вторичных ( $D_p > 1 \mu\text{км}$ ) аэрозолей как структуру, формирующуюся на затравочных центрах, роль которых выполняют первичные ( $D_p \ll 1 \mu\text{км}$ ) аэрозоли. Такое разделение аэрозолей на два класса по размерам, качественно отражающим два главных механизма образования – первичный и вторичный [3], очень важно, так как, по-видимому, играет ключевую роль в понимании фрактального механизма формирования вторичных аэрозолей, которые при агрегации на затравочных центрах (первичных аэрозолях) обнаруживают скейлинговую структуру с вполне определенными характерными масштабами [4].

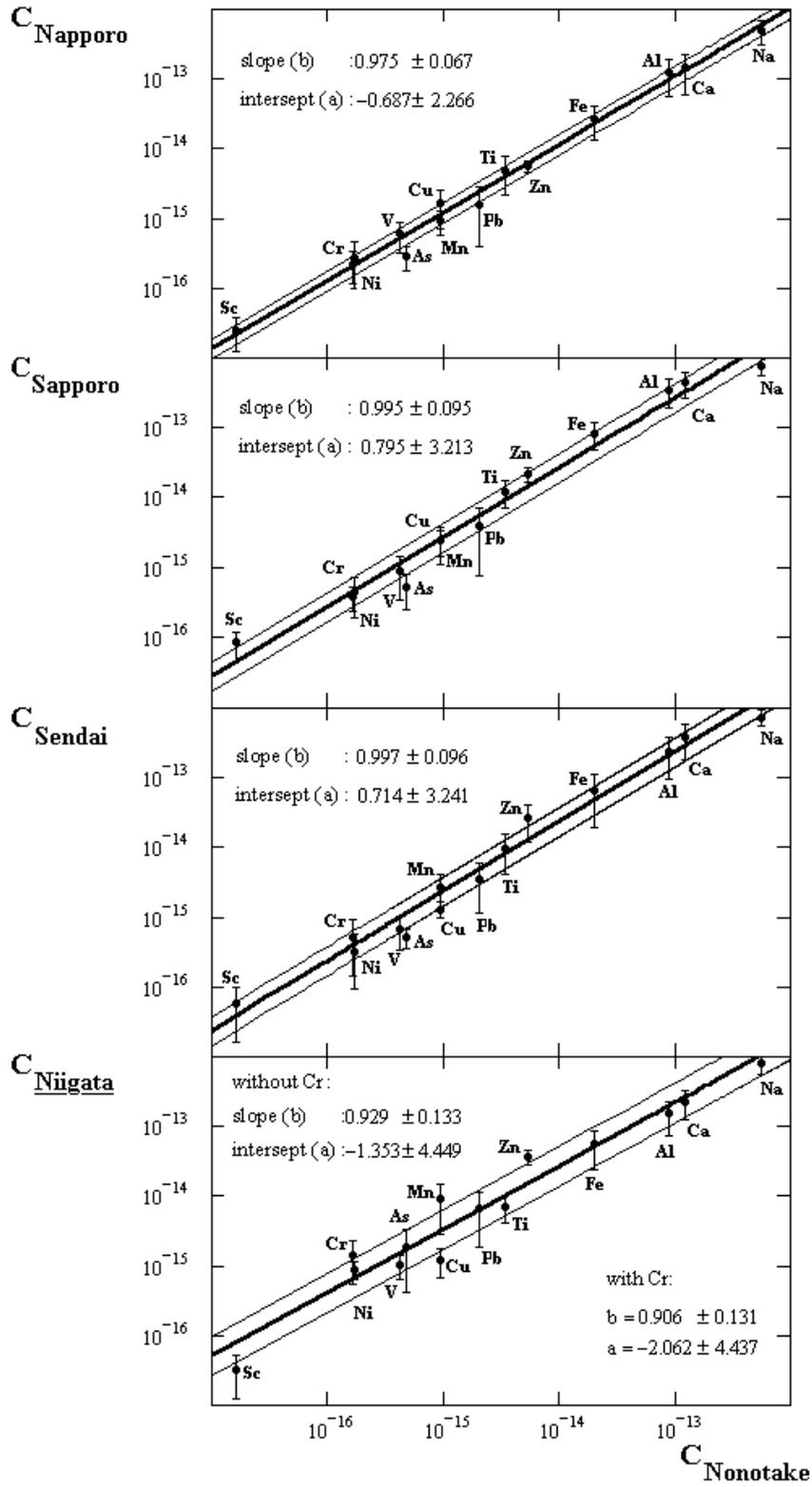
Целью настоящей работы было, с одной стороны, надежное доказательство линейной зависимости (3) в независимых экспериментах, проведенных в условиях высокой статистики, а с другой – теоретическое обоснование и выявление фрактального механизма взаимосвязи между генезисом, размером и составом атмосферных аэрозолей, измеренных в различных регионах Земли, в частности, в параллельных экспериментах в районах Люблины (Словения), Одессы (Украина) и Украинской антарктической станции “Академик Вернадский” ( $64^{\circ}15'$ ;  $65^{\circ}15'$ ).

## 2. Уравнение прямой линии регрессии и экспериментальные данные Национальной Сети Мониторинга Воздуха (NASN) Японии

В данной работе проведена оценка экспериментальных данных [5] NASN для некоторых элементов земной коры (Al, Ca, Fe, Mn, Sc и Ti), антропогенных элементов (As, Cu, Cr, Ni, Pb, V и Zn) морских элементов (Na) в частицах вещества в атмосфере, отобранных по всей Японии за 23 года с 1974 по 1996 гг. NASN имеет 16 станций для отбора образцов в городах Нопоро, Саппоро, Нонотакэ, Сендаи, Ниигата, Токио, Кавасаки, Нагойя, Киото-Хачиман, Осака, Амагасаки, Крашики, Матсуге, Убе, Чикуго-Огори и Омута в Японии, где каждый месяц регулярно отбирались образцы аэрозолей при помощи воздушного пробоотборника низкого объема и затем анализировались методами нейтронно-активационного (НАА) и рентгенофлуоресцентного (РФА) анализа. Далее средняя годовая концентрация каждого элемента оценивалась на основе 12 месячных средних данных отчета NASN от Апреля (начало финансового года в Японии) до Марта; усредненные концентрации за 23 года определены из годовых средних для каждого элемента.

Как показал анализ [5] данных NASN, наибольшие средние концентрации наблюдались в городах Кавасаки (Fe, Ti, Mn, Cu, Ni и V), Осака (Na, Cr, Pb и Zn), Омута (Ca) и Ниигата (As), соответственно. Эти города являются либо промышленными, либо крупнейшими городами Японии. Напротив, наименьшие средние концентрации были зафиксированы в Нонотакэ (Al, Ca, Fe, Ti, Cu, Cr, Ni, V и Zn) и Нопоро (Mn, As и Pb), как и ожидалось [5]. На основе этих результатов Нонотакэ и Нопоро предполагались фоновыми областями Японии.

Для построения линейной зависимости типа (3) использовалась простая модель линейной регрессии, в которой оценки регрессионного анализа проводились с помощью метода наименьших квадратов [6,7]. Результаты представления в логарифмическом масштабе данных NASN относительно аналогичных данных Nonotake  $\{C_{Nonotake}^i\}$ , указанные на рис.1, с высокой степенью достоверности демонстрируют адекватность экспериментальной и теоретической зависимости типа (3). Как можно увидеть из рис.1, для представления данных NASN в виде нормированных концентрационных зависимостей “город-город” в качестве базовой станции была выбрана (хотя это не принципиально!) станция Нонотакэ,



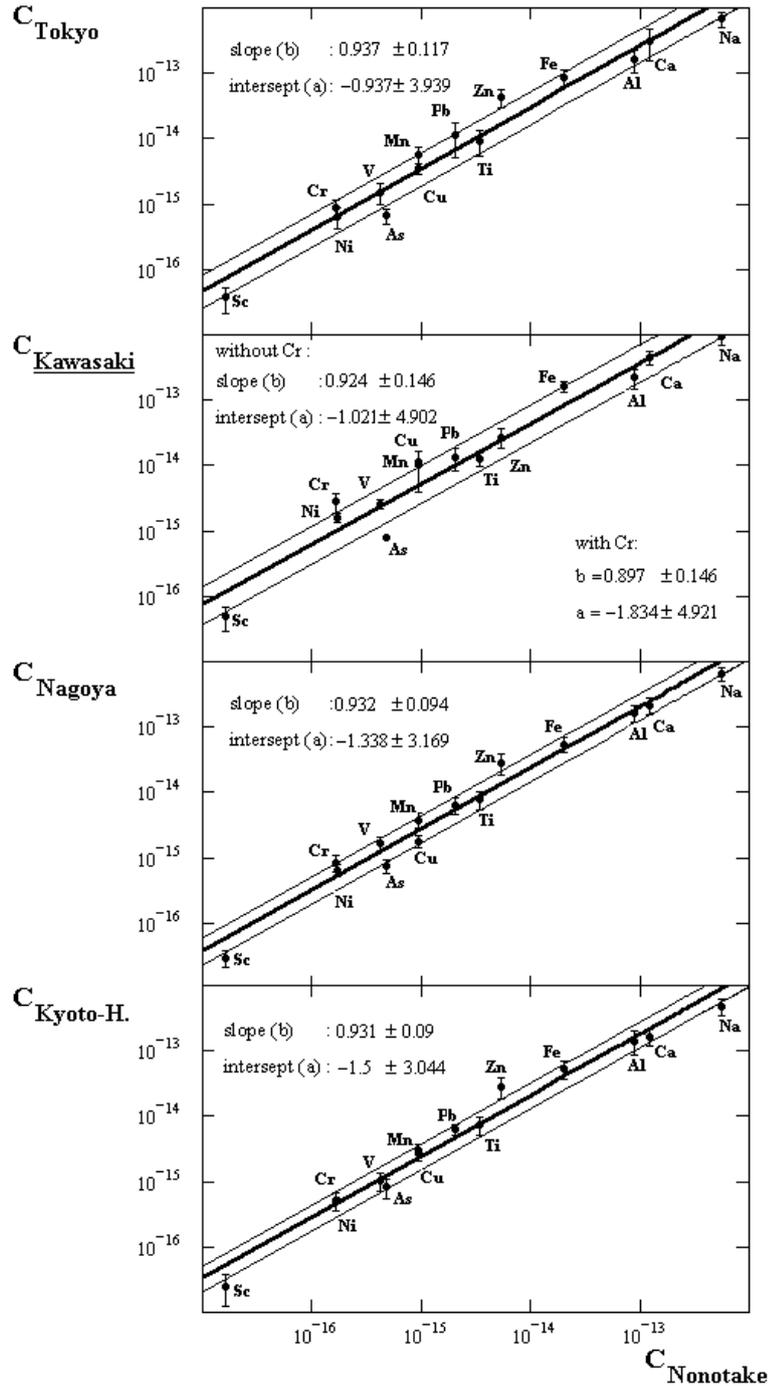


Рис. 1. Зависимость годовых нормированных концентраций элементов в атмосферной взвеси частиц вещества по всей Японии от аналогичных данных, полученных в районе г. Нонотакэ (данные NASN Японии [5]). В некоторых случаях (объяснение в тексте) из данных исключались нормированные концентрации антропогенного элемента Cr. Подчеркнутые города являются крупными промышленными центрами Японии [5].

которая характеризуется не только низкими средними концентрациями элементов земной коры и антропогенных элементов, но их малыми и относительно стабильными во времени (23 года) вариациями [5].

Предварительный вывод, который немедленно следует из найденных закономерностей поведения спектров нормированных концентраций элементов атмосферных аэрозолей различных городов Японии, однозначно указывает на степенной рост массы (объема)  $i$ -элемента атмосферного аэрозоля, тем самым подтверждая предположение [4, 8–10] о фрактальной природе генезиса атмосферных (вторичных) аэрозолей.

Здесь необходимо сделать некоторые предварительные комментарии. При построении линейной зависимости типа (3) в случае промышленных (Ниигата, Амагасаки, Кавасаки, Омута и Убе) и близлежащих (Осака, Курашики, Матсуге) от них городов Японии, из данных исключались концентрации антропогенного элемента Сг (см. рис.1). Это было сделано на том основании, что антропогенные и морские, которые являются экзогенной компонентой так называемой взвеси частиц вещества (Suspended Particulate Matter), лишь частично участвуют в микроскопических процессах, определяющих распределение по размерам и химический состав атмосферных аэрозолей [3]. Для определения “естественного” уровня участия техногенных элементов в формировании аэрозоля они, по-видимому, в известных случаях должны вообще исключаться при исследовании линейной регрессии типа (3).

### **3. Уравнение прямой линии регрессии и состав атмосферных аэрозолей в различных районах Земли**

Очевидно, что для более широкого обобщения результатов обработки данных of NASN необходимо проверить зависимость типа (3) на основе данных аэрозольных исследований атмосферы, проведенных в параллельных экспериментах на различных широтах. В частности, ниже будут обсуждаться эксперименты, проведенные одновременно в районах Любляны (Словения), Одессы (Украина) и Украинской антарктической станции Академик Вернадский ( $64^{\circ}15'$ ;  $65^{\circ}15'$ ). Определение элементного состава атмосферного воздуха в этих экспериментах проводилось с помощью традиционного метода фиксации атмосферных аэрозолей на ядерных фильтрах и последующего применения  $k_0$ -инструментального нейтронно-активационного анализа. Для обработки экспериментальных данных использовался регрессионный анализ.

#### **3.1. Техника и методика эксперимента**

Фиксация атмосферных аэрозолей на ядерных фильтрах. Для аккумуляции атмосферных аэрозолей на ядерных фильтрах использовали прибор типа  $PM_{10}$  с интерфейсом Gent Stacked Filter Unit (SFU) [11, 12]. Основной частью данного прибора являются проточная камера, содержащая импактор, пропускная способность которого эквивалентна действию фильтра с аэродинамическим диаметром пор 10 мкм и 50-процентной эффективностью сбора аэрозолей по массе, и интерфейс SFU, который сконструирован Норвежским институтом исследований воздуха (NILU) и содержит два ядерных фильтра (Nucleopore®) диаметром 47 мм: исходный – с диаметром пор 8 мкм, а второй – с диаметром пор 0,4 мкм. Экспериментально определено [12], что в такой геометрии эффективность сбора аэрозолей исходного фильтра ~ 50%, а второго ~ 100%. Более подробно о результатах детального тестирования аналогичного прибора можно узнать из [12].

Реакторные режимы нейтронной активации элементов, зафиксированных на ядерных фильтрах. Образцы атмосферного воздуха, закрепленные на ядерных фильтрах, подвергались облучению нейтронами в каналах ядерного реактора TRIGA Mark II института Йозефа Стефана (Словения). При облучении элементов-изотопов с короткоживущими нуклидами ядерные фильтры с помощью пневмочеты доставлялись в канал (PT-канал), в котором

поток тепловых нейтронов составлял  $3.5 \cdot 10^{12}$  н·см<sup>-2</sup>·с<sup>-1</sup>, тогда как в случае облучения элементов-изотопов с долгоживущими нуклидами ядерные фильтры с помощью устройства типа “карусели” (Carousel Facility) доставлялись в канал (CF-канал), в котором поток тепловых нейтронов составлял  $1.1 \cdot 10^{12}$  н·см<sup>-2</sup>·с<sup>-1</sup> (время облучения 18–20 часов). Для определения отношения  $F$  теплового и эпитеплового потоков нейтронов и параметра  $\beta$ , который характеризует степень отклонения потока эпитепловых нейтронов от  $1/E$ -закона, использовался метод кадмиевых отношений (“Cd-ratio”). Найденные значения  $F=32,9$  и  $\beta=-0,026$  в случае РТ-канала и  $F=27,5$  и  $\beta=-0,015$  в случае CF-канала использовались при расчетах концентраций элементов-изотопов с короткоживущими нуклидами и долгоживущими нуклидами соответственно.

Определение элементного состава атмосферного воздуха с помощью  $K_0$ -инструментального нейтронно-активационного анализа.  $\gamma$ -Активности облученных образцов измерялись на двух НРГ-детекторах (Ortec, США) с 20- и 40-процентной эффективностью измерений [13]. Экспериментальные данные, полученные на этих детекторах, поступали и обрабатывались на высокоскоростных мультисканальных анализаторах EG&G Ortec Spectrum Master и Canberra S100, соответственно. При этом для вычисления площади пика использовалась программа HYPERMET-PC V5.0 [14], а для вычислений концентраций элементного состава атмосферного аэрозоля – программное обеспечение, известное под названием KAYZERO/SOLCOI® [15]. Более подробно о некоторых деталях  $K_0$ -инструментального нейтронно-активационного анализа можно узнать из [13].

### 3.2. Сравнительный анализ состава атмосферных аэрозолей в различных районах Земли

Результаты представления (рис. 2) в логарифмическом масштабе спектров нормированных концентраций изотопного состава атмосферных аэрозолей городов Любляны (Словения)  $\{C_{Ljubljana}^i\}$  и Одессы (Украина)  $\{C_{Odessa}^i\}$  относительно аналогичных данных, полученных в районе Украинской антарктической станции Академик Вернадский ( $64^{\circ}15'$ ;  $65^{\circ}15'$ )  $\{C_{Ant.station}^i\}$ , с высокой степенью достоверности демонстрируют тот факт, что для прямых линий регрессий “Одесса – Ант. станция”, “Любляна – Ант. станция” и соответственно обратных линий регрессии “Ант. станция – Одесса”, “Ант. станция – Любляна” коэффициент корреляции  $r$  равен приблизительно единице (см. рис. 2):

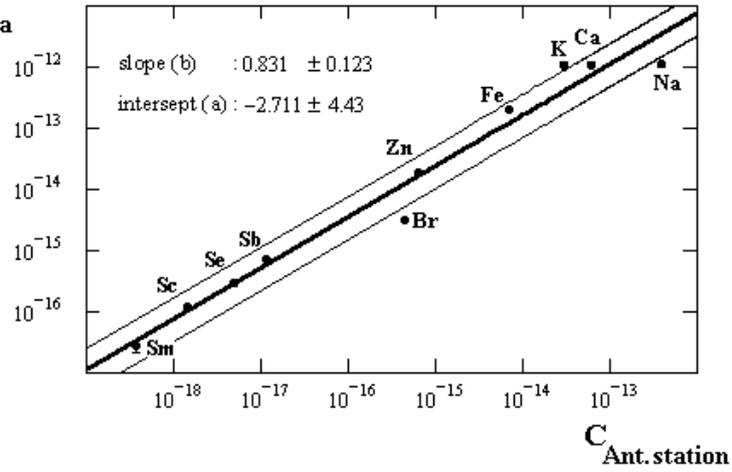
$$r = [b_{12}b_{21}]^{1/2} \approx 1, \quad (4)$$

где  $b_{12}$  и  $b_{21}$  – наклоны прямых и обратных линий регрессий (1) для соответствующих парных выборок.

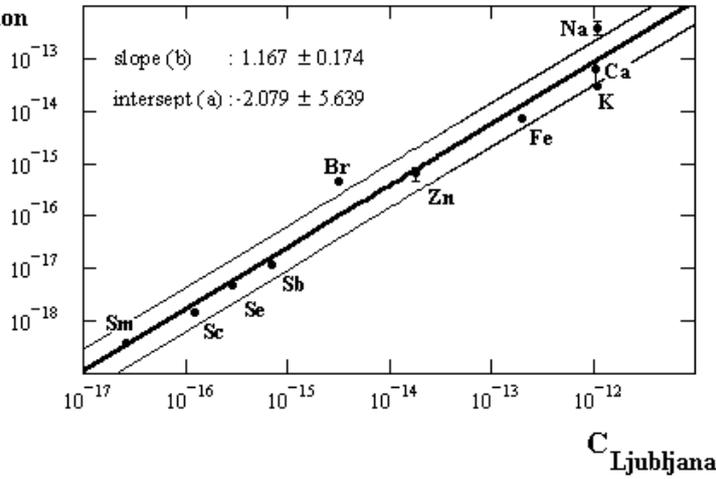
Здесь необходимо напомнить, что одна из наиболее важных интерпретаций коэффициента корреляции состоит в том, что  $r^2$  можно рассматривать как меру доли дисперсии случайной величины  $m_{2i}$ , обусловленной регрессией, на  $m_{1i}$ , и наоборот [6]. Другими словами, при значении коэффициента корреляции  $r=1$  не возникает ошибки при представлении  $m_{1i}$  в виде линейной функции от  $m_{2i}$ , и наоборот.

На рис. 3 для анализа представлены линии регрессии для спектров нормированных концентраций элементов земной коры, антропогенных и морских элементов (таблица 1), экспериментально измеренных в марте 2002 г. в районах города Одессы (Украина), Украинской антарктической станции “Академик Вернадский ( $64^{\circ}15'$ ;  $65^{\circ}15'$ ), в районе города Любляны (Словения), г. Нонотак [5] относительно аналогичных данных, полученных в районе Южного полюса [1]. Выбор концентрационных характеристик атмосферных аэрозолей Южного полюса в качестве базового репера, относительно которого исследовалась

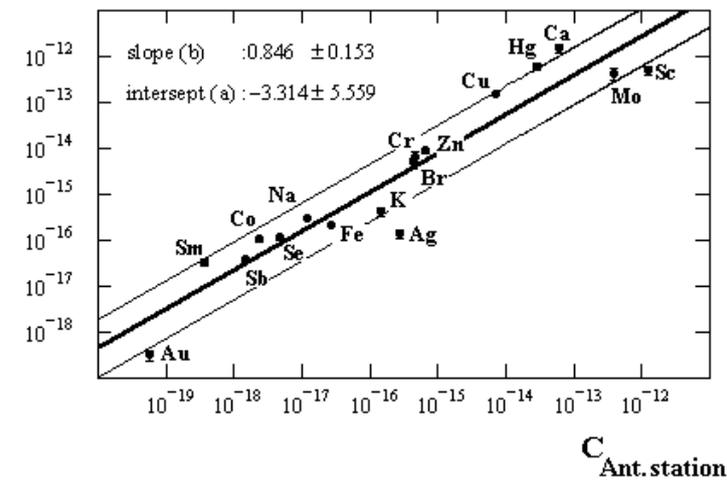
$C_{Ljubljana}$



$C_{Ant.station}$



$C_{Odessa}$



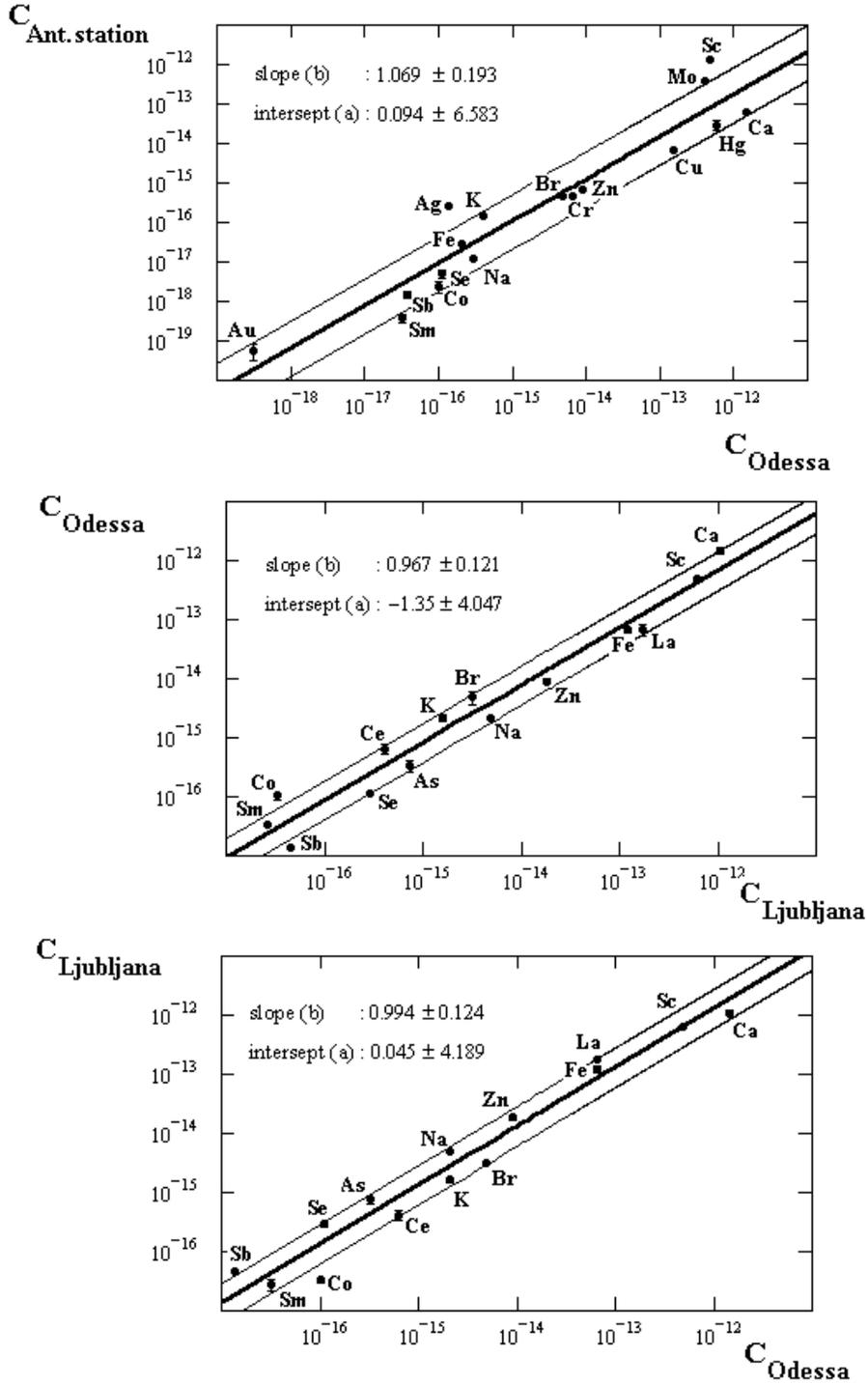


Рис. 2. Линии прямых регрессий “Одесса–Антарктическая станция” (а), “Любляна–Антарктическая станция” (с) и линии обратных регрессий “Антарктическая станция–Одесса” (b), “Антарктическая станция–Любляна” (d).

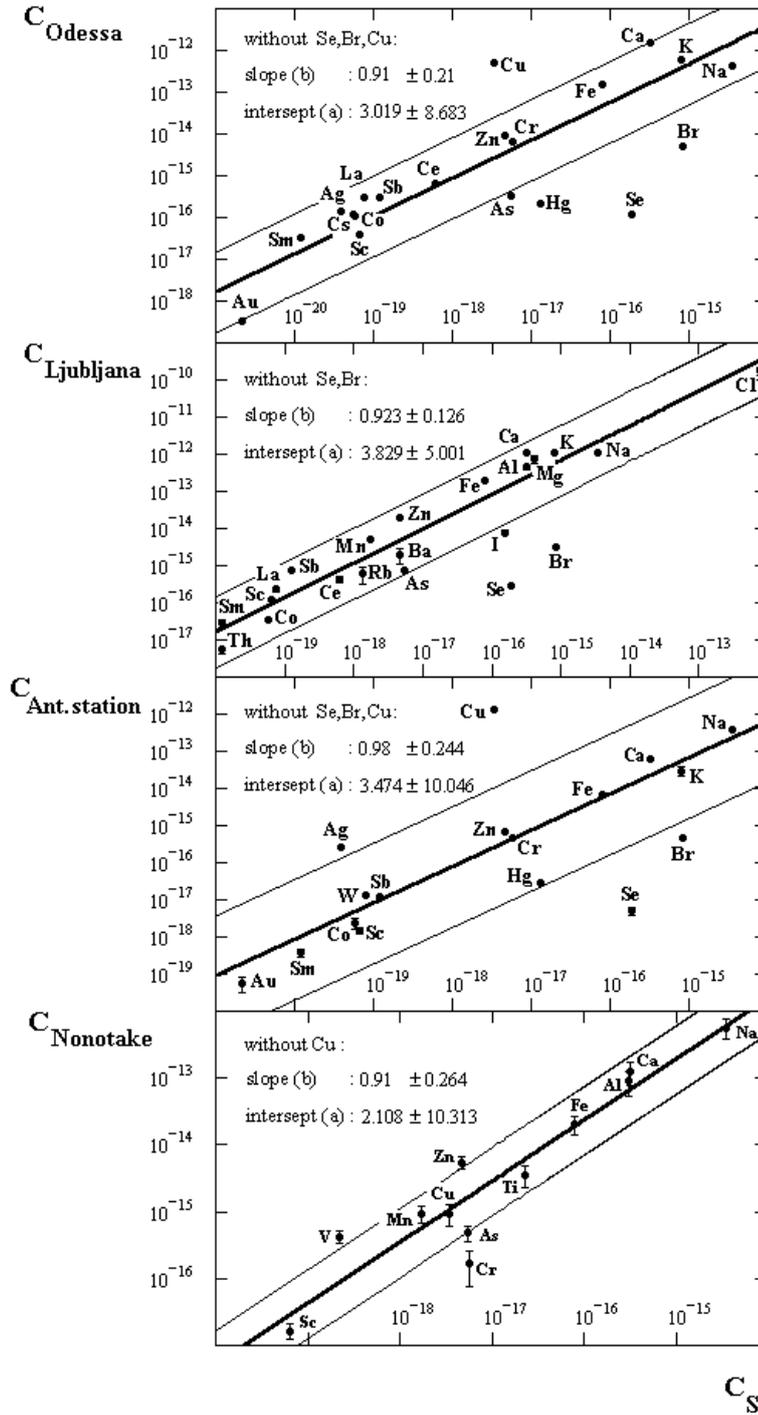


Рис. 3. Зависимость спектра нормированных концентраций изотопных компонент атмосферного аэрозоля, измеренных в районах Одессы (Украина), Любляны (Словения), Антарктической станции Академик Вернадский ( $64^{\circ}15'$ ;  $65^{\circ}15'$ ), г. Нонотаке [5], от аналогичных данных, измеренных в районах Южного полюса [1].

Таблица

Содержание химических элементов в атмосферных аэрозолях. Символы  $C_{SP}$ ,  $C_{CB}$ ,  $C_{Nonotake}$  означают концентрации на Южном Полюсе, континентальных фоновых станциях и на станции г.Нанотакте, соответственно. Измеренные концентрации на Украинской Антарктической станции, в Одессе и Любляне обозначены как  $C_{Antarctica}$ ,  $C_{Odessa}$  и  $C_{Ljubljana}$

Element	$C_{SP}$	$C_{CB}$	$C_{Nonotake}$	$C_{Antarctica}$	$C_{Odessa}$	$C_{Ljubljana}$
	(ng/m <sup>3</sup> )					
S	49	-	-	-	-	-
Si	-	-	-	-	-	-
Cl	2.4	90	-	-	-	528.2
Al	0.82	1.2x10 <sup>3</sup>	237.4	-	-	1152
Ca	0.49	-	185.8	93	2230	1630
Fe	0.62	1x10 <sup>2</sup>	157.6	53.4	1201	1532
Mg	0.72	-	-	-	-	1264
K	0.68	-	-	24.4	502.8	918
Na	3.3	1.4x10 <sup>2</sup>	538.8	361.95	393.8	1046
Pb	-	10	23.2	-	-	-
Zn	3.3x10 <sup>-2</sup>	10	38.3	4.48	62.6	127.2
Ti	0.1	-	15.4	-	-	-
F	-	-	-	-	-	-
Br	2.6	4	-	1.34	14.81	9.62
Cu	3x10 <sup>-2</sup>	3	8.20	11050	4240	-
Mn	1.2x10 <sup>-2</sup>	3	6.61	-	-	34.7
Ni	-	1	1.48	-	-	-
Ba	1.6x10 <sup>-2</sup>	-	-	-	-	6.91
V	1.3x10 <sup>-3</sup>	1	2.44	-	-	17.08
I	0.74	-	-	-	-	36.24
Cr	4x10 <sup>-2</sup>	0.8	1.14	3.11	45.2	-
Sr	5.2x10 <sup>-2</sup>	-	-	-	-	-
As	3.1x10 <sup>-2</sup>	1	2.74	-	1.83	4.18
Rb	2x10 <sup>-3</sup>	-	-	-	-	0.92
Sb	8x10 <sup>-4</sup>	0.5	-	0.07	1.97	4.62
Cd	<1.5x10 <sup>-2</sup>	0.4	-	-	-	-
Mo	-	-	-	1.46	4.08	-
Se	<0.8	0.3	-	0.02	0.47	1.21
Ce	4x10 <sup>-3</sup>	-	-	-	4.22	2.72
Hg	0.17	0.3	-	0.36	2.75	-
W	1.5x10 <sup>-3</sup>	-	-	0.24	-	-
La	4.5x10 <sup>-4</sup>	-	-	-	1.79	1.36
Ga	<1x10 <sup>-3</sup>	-	-	-	-	-
Co	5x10 <sup>-4</sup>	0.1	-	0.02	0.89	0.29
Ag	<4x10 <sup>-4</sup>	-	-	2.74	1.42	-
Cs	1x10 <sup>-4</sup>	-	-	-	0.09	-
Sc	1.6x10 <sup>-4</sup>	5x10 <sup>-2</sup>	0.04	3.36x10 <sup>-3</sup>	0.21	0.298
Th	1.4x10 <sup>-4</sup>	-	-	-	0.29	0.060
U	-	-	-	-	0.07	-
Sm	9x10 <sup>-5</sup>	-	-	2.68x10 <sup>-3</sup>	0.24	0.198
In	5x10 <sup>-5</sup>	-	-	-	-	-
Ta	7x10 <sup>-5</sup>	-	-	-	-	-
Hf	6x10 <sup>-5</sup>	-	-	-	-	-
Yb	<0.05	-	-	-	-	-
Eu	2x10 <sup>-5</sup>	-	-	-	-	-
Au	4x10 <sup>-5</sup>	-	-	1.07x10 <sup>-3</sup>	0.006	-
Lu	6.7x10 <sup>-6</sup>	-	-	-	-	-

зависимость типа (1), определялся двумя причинами. Во-первых, эти данные получены в рамках аналогичной 3.1 идеологии техники и методов измерений и одновременно расширяют географию зоны сравнения. Во-вторых, спектр элементов, характеризующих состав атмосферы Южного полюса (см. таблицу), является очень широким по количеству измеренных изотопов, что является удобным преимуществом при сравнении с концентрационными спектрами с меньшим количеством изотопов.

Устойчивое выполнение равенства (4) не только для экспериментальных данных, представленных на рис.2, но и для любых пар данных NASN Японии [5], прямые регрессии которых представлены на рис.2, однозначно указывают на тот факт, что, с одной стороны, модель линейной регрессии является удовлетворительной, а с другой – любая из исследуемых выборок  $\{m_i\}$ , характеризующих последовательность парциальных концентраций  $i$ -го элемента в аэрозоле, должна подчиняться гауссовскому распределению относительно случайной величины  $\ln p_i$ . Доказательство этих утверждений для мультифрактальных объектов будет дано ниже.

#### **4. Спектр фрактальных размерностей и логнормальное распределение по массам изотопных компонент вторичного аэрозоля**

Детальный анализ рис.1–3, на которых представлены линейные регрессии между различными парами спектров нормированных концентраций элементов атмосферного аэрозоля, измеренных на различных широтах, позволяет сделать однозначный вывод о том, что вторичный аэрозоль по своей внутренней структуре является мультифракталом. Такое заключение сделано на основе надежно установленной (см. п. 2 и 3.2) линейной зависимости типа (3) между концентрациями  $C_i$  одного и того же изотопа  $i$  в атмосферных аэрозолях разных регионов Земли.

Физический смысл выражения (3) отражает тот значительный факт, что мультифрактальные свойства атмосферного аэрозоля, обнаруженные в независимых экспериментах в условиях высокой статистики, являются физическим проявлением свойств иерархической самоподобной структуры вторичного аэрозоля. Следовательно, для теоретического описания свойств такого неоднородного объекта, как атмосферный аэрозоль, открывается возможность применения хорошо известного математического аппарата мультифрактальной геометрии [16–19].

Таким образом, вторичный аэрозоль, который представляет собой многокомпонентную (по элементам) систему, необходимо рассматривать как неоднородный фрактальный объект, т.е. мультифрактал. При этом для полного описания неоднородного фрактального объекта недостаточно введения одной фрактальной размерности  $\alpha_0$  (равной для однородного фрактала  $D_0$ ), а необходим целый спектр таких размерностей  $f(\alpha)$ . Ниже покажем, что спектр фрактальных размерностей  $f(\alpha)$  мультифрактала предопределяет логнормальный тип статистики или, иначе говоря, логнормальный тип распределения по массе  $i$ -й компоненты мультифрактала. Последнее очень важно, так как идея представления распределения развитых аэрозолей по массе лог-нормальным распределением предсказывается в рамках хорошо зарекомендовавшей себя теории самоподобия [20,1]) и одновременно находит свое подтверждение в многочисленных экспериментах [3].

Для понимания основной идеи вывода предварительно дадим некоторые базовые понятия и определения, используемые в теории мультифрактала. Рассмотрим фрактальный объект, занимающий некую ограниченную область  $\mathcal{L}$  размера  $L$  в евклидовом пространстве с размерностью  $d$ . Пусть на каком-то этапе его построения он представляет собой множество из  $N \gg 1$  точек, как-то распределенных в этой области. Разобьем всю область  $\mathcal{L}$  на кубические ячейки со стороной  $\varepsilon \ll L$  и объемом  $\varepsilon^d$ . Далее нас будут интересовать только занятые ячейки, в которых содержится хотя бы одна точка. Пусть номер занятых ячеек  $i$  изменяется в пределах  $i = 1, 2, \dots, N(\varepsilon)$  – суммарное количество занятых ячеек, которое,

конечно, зависит от размера ячейки  $\varepsilon$ . Тогда в случае регулярного (однородного) фрактала, согласно определению фрактальной размерности  $D$ , число занятых ячеек при достаточно малых  $\varepsilon$  ведет себя следующим образом

$$N(\varepsilon) \approx \varepsilon_L^{-D} = L_\varepsilon^D. \quad (5)$$

где  $\varepsilon$  – размер ячейки в единицах  $L$ ,  $L_\varepsilon$  – размер фрактального объекта в единицах  $\varepsilon$ .

Случай неоднородного фрактала несколько сложнее, так как одной из основных характеристик мультифрактала является, как мы уже отмечали, спектр фрактальных размерностей  $f(\alpha)$ , т.е. набор вероятностей  $p_i$ , показывающих относительную заселенность ячеек  $\varepsilon$ , которыми покрывается исходное множество. Чем меньше размер ячейки, тем меньше величина ее заселенности. Для самоподобных множеств зависимость  $p_i$  от размера ячейки  $\varepsilon$  имеет степенной характер

$$p_i(\varepsilon) = \frac{1}{N_i(\varepsilon)} \approx \varepsilon_L^{\alpha_i} = L_\varepsilon^{-\alpha_i}, \quad (6)$$

где  $\alpha_i$  представляет собой некоторый показатель степени, вообще говоря, разный для разных ячеек  $i$ . Очевидно, что для регулярного (однородного) фрактала все показатели  $\alpha_i$  в (6) одинаковы и равны фрактальной размерности  $D$ .

Здесь сделаем отступление и запишем логарифмическое соотношение (4) в представлениях мультифрактальной геометрии:

$$\ln \frac{C_{1i}}{C_{2i}} = \ln \frac{n_1 m_{1i}}{(n_2 m_{2i})^{h_{12}}} = \ln \frac{n_1}{n_2^{h_{12}}} \left( \frac{L_1 / \varepsilon_1}{(L_2 / \varepsilon_2)^{h_{12}}} \right)^{\alpha_i} = a_{12}, \quad (7)$$

где  $n_1$  и  $n_2$  – плотность затравочных центров, роль которых выполняют первичные ( $D_p < 1 \mu\text{км}$ ) аэрозоли;  $m_{1i}$  и  $m_{2i}$  – парциальные концентрации  $i$ -го элемента в аэрозоле из регионов 1 и 2 соответственно.  $L_1$  и  $L_2$  – средние размеры вторичного аэрозоля в этих же регионах.

Перейдем теперь к вопросу о распределении вероятностей различных значений  $\alpha_i$ . Пусть  $n(\alpha)d\alpha$  есть вероятность того, что  $\alpha_i$  находится в интервале от  $\alpha$  до  $\alpha + d\alpha$ . Другими словами,  $n(\alpha)d\alpha$  представляет собой относительное число ячеек  $i$ , обладающих одной и той же мерой  $p_i$  с  $\alpha_i$ , лежащими в этом интервале. В случае монофрактала, для которого все  $\alpha_i$  одинаковы и равны фрактальной размерности  $D$ , это число, очевидно, пропорционально полному количеству ячеек  $N(\varepsilon) \approx \varepsilon_L^{-D}$ , как это следует из (5).

Для мультифрактала, однако, это не так, и разные значения  $\alpha_i$  встречаются с вероятностью, характеризуемой не одной и той же величиной  $D$ , а разными (в зависимости от  $\alpha$ ) значениями показателя степени  $f(\alpha)$ , которая, по существу, представляет собой спектр фрактальных размерностей однородных подмножеств  $\mathcal{F}_\alpha$  исходного множества  $\mathcal{F}$ :

$$n(\alpha) \approx \varepsilon_L^{-f(\alpha)}. \quad (8)$$

Таким образом, отсюда становится понятным термин мультифрактал. Его можно понимать как иерархическое объединение различных, но однородных фрактальных подмножеств  $\mathcal{F}_\alpha$  исходного множества  $\mathcal{F}$ , каждое из которых имеет свое собственное значение фрактальной размерности  $f(\alpha)$ .

Теперь покажем, каким образом функция  $f(\alpha)$  предопределяет логнормальный вид распределения мультифрактального объекта по массе (объему)  $i$ -й компоненты мультифрактала. Для удобства дальнейшего изложения представим выражение (8) в следующем эквивалентном виде:

$$n(\alpha) \approx \exp[f(\alpha) \ln L_\varepsilon]. \quad (9)$$

Нетрудно показать [19], что вблизи своего максимума при значении  $\alpha_0$  одномодовая функции  $f(\alpha)$  может быть аппроксимирована параболой:

$$f(\alpha) \approx D_0 - \eta \cdot (\alpha - \alpha_0)^2, \quad (10)$$

где кривизна параболы

$$\eta = \frac{f''(\alpha_0)}{2} = \frac{1}{2[2(\alpha_0 - D_0) + D_{q=0}'']}$$

определяется значением второй производной от функции  $f(\alpha)$  в точке  $\alpha_0$ . Из условия выпуклости функции  $f(\alpha)$  очевидно, что величина, заключенная в квадратные скобки в этом выражении, должна быть всегда положительна. То, что последнее слагаемое  $D_{q=0}''$  в этих скобках численно мало и им можно пренебречь, будет обосновано чуть ниже.

При больших  $L_\varepsilon$  распределение  $n(\alpha)$  (9) с учетом (10) принимает вид:

$$n(\alpha) \sim \exp\left[D_0 \ln L_\varepsilon - \frac{(\alpha - \alpha_0)^2 \ln L_\varepsilon}{4(\alpha_0 - D_0)}\right]. \quad (11)$$

Тогда, учитывая (5), получаем из (11) функцию распределения случайной величины  $p_i$

$$n(p_i) \sim \ln N_{D_0} \cdot \exp\left[-\frac{1}{4 \ln(1/p_0 N_{D_0})} (\ln p_i - \ln p_0)^2\right], \quad (12)$$

которое с учетом нормировки примет следующий окончательный вид:

$$P(p_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \exp\left(-\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right) \cdot \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2} (\ln p_i - \mu)^2\right], \quad (13)$$

где

$$\mu = \ln p_0, \quad \sigma^2 = 2 \ln \frac{1}{p_0 N_{D_0}}. \quad (14)$$

Это и есть так называемое логнормальное распределение по (относительной) массе  $p_i$ . Первые моменты такого типа распределения для случайной величины  $p_i$  можно представить в виде:

$$\langle p \rangle = \exp\left(\mu + \frac{3}{2}\sigma^2\right) = 1/p_0^2 N_{D_0}^3 = L_\varepsilon^{2\alpha_0 - 3D_0}, \quad (15)$$

$$\text{var}(p) = \exp(2\mu) \cdot [\exp(4\sigma^2) - \exp(3\sigma^2)] = L_\varepsilon^{2(2\alpha_0 - 3D_0)} (L_\varepsilon^{2(2\alpha_0 - D_0)} - 1), \quad (16)$$

тогда как нетрудно показать, что это же распределение (13) для случайной величины  $\ln p_i$  имеет классическую гауссовскую форму:

$$P(\ln p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2} [\ln p - \langle \ln p \rangle]^2\right\}, \quad (17)$$

где первые моменты этого распределения для случайной величины  $\ln p_i$  имеют следующий вид:

$$\langle \ln p \rangle = \mu + \sigma^2 = (\alpha_0 - 2D_0) \ln L_e, \quad (18)$$

$$\text{var}(\ln p) = \sigma^2 = 2(\alpha_0 - D_0) \ln L_e. \quad (19)$$

Следовательно, для двумерной случайной величины  $(p_{1i}, p_{2i})$  можно записать нормальный закон распределения на плоскости, который, согласно известной теореме о форме многомерного нормального распределения [22], будет иметь следующий вид:

$$P(\ln p_{1i}, \ln p_{2i}) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-r^2}} \exp\left[-\frac{1}{2(1-r^2)} (u^2 + v^2 - 2ruv)\right], \quad (20)$$

где

$$u = \frac{\ln p_{1i} - \langle \ln p_{1i} \rangle}{\sigma_1}, \quad v = \frac{\ln p_{2i} - \langle \ln p_{2i} \rangle}{\sigma_2}, \quad (21)$$

а  $r = \text{cov}(\ln p_{1i}, \ln p_{2i}) / \sigma_1\sigma_2$  – коэффициент корреляции величин  $\ln p_{1i}$  и  $\ln p_{2i}$ .

Отсюда, в силу известной теоремы о линейной корреляции [6, 22], легко показать, что если двумерная случайная величина  $(\ln p_{1i}, \ln p_{2i})$  распределена нормально, то  $\ln p_{1i}$  и  $\ln p_{2i}$  связаны линейной корреляционной зависимостью. Последнее означает, что параметры двумерного нормального распределения случайных значений  $p_{1i}$  и  $p_{2i}$   $i$ -й компоненты в одной аэрозольной частице, измеренные в разных регионах (1 и 2) Земли, связаны уравнениями прямой линейной регрессии

$$\ln p_{1i} - \langle \ln p_{1i} \rangle = r \frac{\sigma_{1i}}{\sigma_{2i}} [\ln p_{2i} - \langle \ln p_{2i} \rangle] \quad (22)$$

и обратной линейной регрессии

$$\ln p_{2i} - \langle \ln p_{2i} \rangle = r \frac{\sigma_{2i}}{\sigma_{1i}} [\ln p_{1i} - \langle \ln p_{1i} \rangle], \quad (23)$$

где  $i=1, \dots, N_p$  – номер компоненты.

Учитывая, что в эксперименте измеряется суммарная концентрация  $C_i$   $i$ -й компоненты в единичном объеме атмосферы, парциальная концентрация  $m_i$   $i$ -й компоненты в одной аэрозольной частице, измеренной в разных регионах (1 и 2) Земли, будет иметь следующий вид

$$m_{1i} = C_{1i}/n_1, \quad m_{2i} = C_{2i}/n_2, \quad (24)$$

где  $n_1$  и  $n_2$  – плотность затравочных центров, роль которых выполняют первичные ( $D_p < 1 \mu\text{км}$ ) аэрозоли.

Здесь следует сделать важное отступление, которое связано с выбором количественной меры для описания фрактальных структур. Главная трудность, как точно отмечает Федер [18], – определение надлежащих вероятностей, соответствующих выбранной мере. Другими словами, если выбор меры определяет процедуру определения вероятностей  $\{p_i\}$ , которые характеризуют приращения выбранной меры для данного уровня разрешения  $\varepsilon$ , то сами вероятности предопределяют, в свою очередь, соответствующий метод измерения их. Таким образом, общая стратегия количественного описания фрактальных объектов, в общем случае, должна содержать в себе следующий прямой или обратный порядок действий: выбор меры – набор соответствующих вероятностей – метод измерений этих вероятностей.

Для описания нашей стратегии выберем обратный порядок необходимых действий. Так как в настоящей работе измерялись усредненные массы изотопных компонент аэрозольного мультифрактала, то геометрические вероятности, которые можно сконструировать с помощью экспериментальных данных для некоторого фиксированного  $\varepsilon$ , имеют практически однозначный вид:

$$p_i(\varepsilon = const) = \frac{m_i/\rho_i}{\sum_i m_i/\rho_i} = \frac{C_i/\rho_i}{\sum_i C_i/\rho_i}, \quad (25)$$

где  $\rho_i$  – удельный вес  $i$ -й компоненты вторичного аэрозоля.

В силу того, что случайный характер образования вторичного аэрозоля, который присущ ему изначально, определяется адекватно случайным процессом многокомпонентной диффузионно-лимитированной агрегации (ДЛА), для количественного описания стохастических неоднородностей поверхности, или, точнее говоря, исследования эволюции возможного роста диаметра кластерных аэрозолей, в настоящей работе использовалась так называемая гармоническая мера [18].

На практике гармоническая мера оценивается следующим образом. Так как периметр кластеров, образующихся при ДЛА, пропорционален их массе, то число узлов  $N_p$  на периметре, т.е. число возможных точек роста, пропорционально числу  $N$  в кластере. Оба числа,  $N_p$  и  $N$ , изменяются по степенному закону (5) в зависимости от диаметра  $L$  кластера. Отсюда все узлы  $N_p$ , принадлежащие периметру таких кластеров, имеют ненулевую вероятность попадания в них частицы, совершающей случайное блуждание, т.е. являются носителем гармонической меры  $M_d(q, \varepsilon_L)$ :

$$M_d(q, \varepsilon_L) = \sum_{i=1}^{N_p} p_i^q \cdot \left(\frac{\varepsilon}{L}\right)^d = Z(q, \varepsilon_L) \cdot \varepsilon_L^d \xrightarrow{L \rightarrow \infty} \begin{cases} 0, & d > \tau(q), \\ \infty, & d < \tau(q) \end{cases}, \quad (26)$$

где  $Z(q, \varepsilon_L)$  – обобщенная статистическая сумма на интервале  $-\infty < q < \infty$ ,  $\tau(q)$  – показатель массы, при котором мера не обращается в нуль или бесконечность при  $L \rightarrow \infty$  ( $\varepsilon_L \rightarrow 0$ ). Очевидно, в такой записи гармоническая мера характеризуется всей последовательностью показателей  $\tau(q)$ , определяющей, по какому степенному закону изменяются вероятности  $p_i$  в зависимости от  $L$ .

При этом спектр фрактальных размерностей для гармонической меры вычисляется обычным образом, но с учетом небольшой модификации, связанной с тем, что для исследования возможного роста диаметра  $L$  кластера используются “броуновские частицы-зонды” с фиксированным диаметром  $\varepsilon$ . Из (26) следует, что в этом случае обобщенная статистическая сумма  $Z(q, \varepsilon_L)$  представима в виде

$$Z(q, \varepsilon_L) = \sum_{i=1}^{N_p} p_i^q \sim \varepsilon_L^{-\tau(q)}. \quad (27)$$

Из результатов численного моделирования гармонической меры, в ходе которого поверхность кластера ДЛА зондируется большим числом случайно блуждающих частиц, известно, что вершины “высоких” выступов такого фрактального агрегата имеют большие вероятности, чем вершины “малых” выступов. Следовательно, если перенумеровать индексом  $I = 1, \dots, N_p$  возможные точки роста на периметре нашего аэрозольного мультифрактала, то набор вероятностей

$$\mathfrak{R} = \{p_i\}_{i=1}^{N_p}, \quad (28)$$

составленный из вероятностей типа (25), будет эмулировать возможный набор сечений взаимодействия броуновской частицы с поверхностью аэрозольного мультифрактала, состоящей из  $N_p$  групп, распределенных по поверхности атомов одного сорта, каждая из которых характеризует  $i$ -ю изотопную компоненту в одной аэрозольной частице.

Ситуация усиливается тем обстоятельством, что каждая из независимых компонент в силу (17) подчиняется гауссовскому распределению, которое, как известно [22], относится к классу безгранично делимых распределений, или, точнее говоря, к классу так называемых  $\alpha$ -устойчивых распределений. Последнее означает, что хотя гауссовское распределение характеризуется для каждой из компонент в отдельности разными параметрами (средним  $\mu_i = \langle \ln p_i \rangle$  и дисперсией  $\sigma_i^2 = \text{var}(\ln p_i)$ ), результирующее распределение имеет распределение того же самого типа, т.е. гауссовское, но с параметрами  $\mu = \langle \ln p \rangle = \sum \mu_i$  и  $\sigma^2 = \sum \sigma_i^2$ . Отсюда следует, что параметры двумерного нормального распределения всех соответствующих компонент в плоскости  $\{p_1, p_2\}$  связаны уравнениями прямой линейной регрессии

$$\ln p_1 - \langle \ln p_1 \rangle = r \frac{\sigma_1}{\sigma_2} [\ln p_2 - \langle \ln p_2 \rangle] \quad (29)$$

и обратной линейной регрессии

$$\ln p_2 - \langle \ln p_2 \rangle = r \frac{\sigma_2}{\sigma_1} [\ln p_1 - \langle \ln p_1 \rangle]. \quad (30)$$

Следовательно, доказательство правомерности предположения (28) в случае вторичного аэрозоля, или, что то же самое, правомерности применения гармонической меры для количественного описания поверхности аэрозольного стохастического фрактала, будет обеспечено в том случае, если совместный учет (28) и уравнения прямой линейной регрессии (29) приведет к уравнению, тождественному уравнению прямой линейной регрессии (3).

Поэтому с учетом (28) запишем, например, уравнение прямой регрессии, или, другими словами, условие линейной корреляции между выборками концентраций  $i$ -х компонент  $\{\ln(m_{1i}/\rho_i)\}$  и  $\{\ln(m_{2i}/\rho_i)\}$  в атмосферном аэрозоле, измеренных в различных местах (1 и 2):

$$\ln(C_{1i}/\rho_i) = a_{12} + b_{12} \ln(C_{2i}/\rho_i), \quad a_{12} = \ln \left[ \frac{\langle C_{1i}/\rho_i \rangle}{\langle C_{2i}/\rho_i \rangle^{b_{12}}} \right], \quad b_{12} = r \frac{\sigma_1}{\sigma_2}. \quad (31)$$

Очевидно, что оно полностью совпадает с уравнением прямой линейной регрессии (3), но отличается тем, что получено не эмпирическим путем, а обосновано теоретически на основе гауссовости случайной величины  $\ln p$ .

Физическая интерпретация интерсепта  $a_{12}$  очевидна из анализа выражения (29), тогда как смысл коэффициента регрессии  $b_{12}$ , становится понятным, согласно (19) и (29), на основе следующего выражения:

$$b_{12} = r \cdot \left( \frac{\text{var}(\ln p_1)}{\text{var}(\ln p_2)} \right)^{1/2} = r \cdot \left[ \frac{\ln(L_1/\varepsilon_1)}{\ln(L_2/\varepsilon_2)} \right]^{1/2}, \quad (32)$$

где  $L_1, L_2$  – средние размеры отдельных аэрозольных частиц-мультифракталов, характерных для атмосфер исследуемых регионов (индексы 1 и 2) Земли;  $\varepsilon_1$  и  $\varepsilon_2$  – размеры ячеек разбиения соответствующих аэрозольных мультифракталов.

Ниже представим алгоритм вычислительной процедуры идентификации спектров обобщенных фрактальных размерностей  $D_q$  и функции  $f(\alpha)$ . Очевидно, что такая задача может быть решена с помощью следующей избыточной системы нелинейных уравнений типа (15), (16), (18) и (19):

$$\ln \langle p \rangle = (2\alpha_0 - 3D_0) \ln(L/\varepsilon), \quad (33)$$

$$\text{var}(p) = (L/\varepsilon)^{2(2\alpha_0 - 3D_0)} \left[ (L/\varepsilon)^{2(\alpha_0 - D_0)} - 1 \right].$$

$$\langle \ln p \rangle = \mu + \sigma^2 = (\alpha_0 - 2D_0) \ln(L/\varepsilon), \quad (34)$$

$$\text{var}(\ln p) = \sigma^2 = 2(\alpha_0 - D_0) \ln(L/\varepsilon),$$

где  $\varepsilon$  – фиксированный размер кубической ячейки, на которые разбивается, как указывалось ранее, ограниченная область  $\mathcal{E}$  размера  $L$  в евклидовом пространстве с размерностью  $d$ , содержащая фрактальное множество точек.

Анализ системы уравнений (33)–(34) показывает, что для ее решения относительно переменных  $\alpha_0, D_0$  и  $\varepsilon$  необходимо и достаточно провести экспериментальные измерения: а)  $i$ -х компонент выборки концентраций  $\{C_i\}$  в единичном объеме атмосферного воздуха (см. раздел 3), и б) распределения аэрозолей по размерам для определения среднего размера  $L$ .

Здесь необходимо напомнить, что с физической точки зрения наиболее интересными в спектре обобщенных фрактальных размерностей  $D_q$ , соответствующих различным неоднородностям мультифрактала, являются так называемые размерность счета ячеек  $D_0$ , энтропийная размерность  $D_1$  и корреляционная размерность  $D_2$ . Ниже, в рамках приведенных ранее понятий и определений, используемых в теории мультифрактала, представим с учетом решения системы (33)–(34) простую процедуру нахождения спектра обобщенных фрактальных размерностей  $D_q$ .

Из (27) следует, что мультифрактал в нашем случае характеризуется нелинейной функцией  $\tau(q)$  моментов  $q$

$$\tau(q) = \lim_{\varepsilon_L \rightarrow 0} \frac{\ln Z(q, \varepsilon_L)}{\ln \varepsilon_L}. \quad (35)$$

Как и ранее, будем рассматривать фрактальный объект, занимающий некую ограниченную область  $\mathcal{E}$  “бегущего” размера  $L$  (так, что  $(\varepsilon_L \rightarrow 0)$ ) в евклидовом пространстве с размерностью  $d$ . Тогда спектр обобщенных фрактальных размерностей  $D_q$ , характеризующий статистические неоднородности (распределение точек в области  $\mathcal{E}$ ) мультифрактала, определяется с помощью соотношения

$$D_q = \frac{\tau(q)}{q-1}, \quad (37)$$

где численный множитель  $(q-1)$  нормирует функцию  $\tau(q)$  с таким расчетом, чтобы для множеств постоянной плотности в  $d$ -мерном евклидовом пространстве выполнялось равенство  $D_q=d$ .

Далее нас будет интересовать известная в теории мультифрактала связь показателя массы  $\tau(q)$  с введенной нами ранее мультифрактальной функцией  $f(\alpha)$ , с помощью которой определяется спектр обобщенных фрактальных размерностей  $D_q$ :

$$D_q = \frac{\tau(q)}{q-1} = \frac{1}{q-1} [q \cdot a(q) - f(a(q))]. \quad (38)$$

Очевидно, что в нашем случае, когда экспериментально определяется выборка  $\{p_i\}$  и численно находится размер ячейки  $\varepsilon \ll L$  (на основе системы уравнений (33)–(34)), спектр обобщенных фрактальных размерностей  $D_q$  (37) можно найти с помощью выражения для показателя массы  $\tau(q)$  (35):

$$D_q = \frac{\tau(q)}{q-1} \approx \frac{\ln \sum_{i=1}^{N_p} p_i^q}{(q-1) \ln \varepsilon_L}. \quad (39)$$

И, наконец, совместное применение преобразования Лежандра

$$\alpha = \frac{d\tau}{dq}, \quad (40)$$

$$f(\alpha) = q \frac{d\tau}{dq} - \tau, \quad (41)$$

которое задает алгоритм перехода от переменных  $\{q, \tau(q)\}$  к переменным  $\{\alpha, f(\alpha)\}$ , и приближенного аналитического выражения (39) для функции  $D_q$ , позволяет определить выражение для мультифрактальной функции  $f(\alpha)$ .

Теперь рассмотрим частный случай нахождения размерности счета ячеек  $D_0$  и энтропийной размерности  $D_1$ . Одна из целей этого рассмотрения связана с обоснованием предположения о малости величины  $D_{q=0}''$  в выражении (10), которое использовалось для вывода логнормального распределения случайной величины  $p_i$  (13).

Легко показать, что совместное применение уравнения (8) и обратного преобразования Лежандра, задающего переход от переменных  $\{\alpha, f(\alpha)\}$  к переменным  $\{q, \tau(q)\}$ , порождает следующее выражение для зависимости  $\alpha(q)$  от моментов  $q$ :

$$\alpha(q) = 2q(\alpha_0 - D_0) + \alpha_0. \quad (42)$$

Подставляя (42) и (8) в (38), получим приближенное выражение для спектра обобщенных фрактальных размерностей  $D_q$  ( $q \neq 0,1$ ) в зависимости от  $\alpha_0$  и  $D_0$ :

$$D_q = \frac{1}{q-1} [q^2(\alpha_0 - D_0) + q\alpha_0 - D_0]. \quad (43)$$

Таким образом, нетрудно выписать выражения для размерности счета ячеек  $D_0$  и энтропийной размерности  $D_1$  в зависимости от  $\alpha_0$  и  $D_0$ :

$$D_0 = D_0, \quad (44)$$

$$D_1 = \lim_{q \rightarrow 1} \frac{q \cdot a(q) - f(a(q))}{q-1} = 2D_0 - \alpha_0. \quad (45)$$

Здесь следует сделать несколько замечаний. Напомним, что  $f(\alpha_{q=1}) = D_1$  является значением фрактальной размерности того подмножества из области  $\mathcal{L}$ , которое дает наибольший вклад в статистическую сумму (36) при  $q=1$ . Но при  $q=1$  статистическая сумма (36) в силу условия нормировки равна 1 и не зависит от размера ячейки  $\varepsilon$ , на которые делится, как указывалось выше, область  $\mathcal{L}$ . Следовательно, этот наибольший вклад также порядка единицы. Поэтому в этом (и только в этом) случае вероятности заполнения ячеек  $p_i \approx \mathcal{E}_L^\alpha$  (6) обратно пропорциональны числу имеющихся ячеек  $n(\varepsilon) \approx \mathcal{E}_L^{-f(\alpha)}$  (8), т.е. выполняется условие  $f(\alpha) = \alpha$ .

Следовательно, параметры системы уравнений (33)–(34), полученные с помощью выражения (10), принципиально не могут содержать информацию об обобщенных фрактальных размерностях  $D_q$  для абсолютных значений моментов  $q$  выше единицы (т.е.  $|q| > 1$ ).

Во-вторых, нетрудно показать, что выражение (39) для энтропийной размерности  $D_1$  не зависит от конкретного вида функции  $f(\alpha)$ , но определяется ее свойствами, например, симметрией  $f(\alpha) = \alpha$ ,  $f'(\alpha) = 1$  и выпуклостью  $f''(\alpha) > 0$ . Геометрический способ определения энтропийной размерности  $D_1$ , представленный на рис. 4, является одновременно геометрическим доказательством утверждения (45).

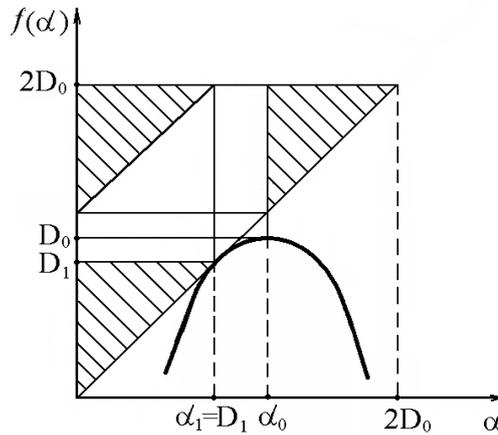


Рис. 4. Геометрический способ определения энтропийной размерности  $D_1$ , который приводит к очевидному равенству  $D_1 = 2D_0 - \alpha_0$ .

В-третьих, очевидная эквивалентность выражений энтропийной размерности  $D_1$ , полученных с помощью параболической аппроксимации функции  $f(\alpha)$  и геометрического способа (рис. 4), указывает на то, что величина  $D''_{q=0}$  в выражении (10) равна нулю. Таким образом, использованное нами ранее предположение о малости величины  $D''_{q=0}$  в выражении (10) математически правомерно.

И, наконец, отметим, что знание обобщенных фрактальных размерностей  $D_q$ , и особенно  $D_1$ , которая характеризует темп потери информации в ходе динамической эволюции мультифрактала, играет наряду с корреляционной размерностью  $D_2$  ключевую роль в понимании механизма формирования вторичных аэрозолей, так как позволяет моделировать скейлинговую структуру аэрозоля с вполне определенными характерными масштабами. Возвращаясь к исходной задаче о распределении точек на фрактальном множестве  $\mathcal{E}$ , можно сказать, что величина  $D_1$  характеризует информацию, необходимую для определения местоположения точки в некоторой ячейке, тогда как корреляционная размерность  $D_2$  определяет вероятность того, что две наугад взятые точки разделены расстоянием меньшим, чем  $\varepsilon_L$ . Другими словами, при стремлении относительного размера ячейки к нулю ( $\varepsilon_L \rightarrow 0$ ) эти величины, в общем случае, ведут себя противоположным, но согласованным образом: энтропия ( $D_1$ ) уменьшается, тогда как корреляционная функция ( $D_2$ ) мультифрактала растет.

## 5. Выводы

Сравнительный анализ различных пар экспериментальных спектров нормированных концентраций элементов атмосферного аэрозоля, измеренных в различных регионах Земли, обнаруживает устойчивую линейную (в логарифмическом масштабе) корреляционную ( $r=1$ ) зависимость, что указывает на степенной рост массы (объема) каждого из элементов атмосферного аэрозоля и соответственно на причину этого роста – фрактальную природу генезиса атмосферных (вторичных) аэрозолей.

В рамках мультифрактальной геометрии показано, что распределение изотопных компонент вторичного аэрозоля по массам (объемам) подчиняется логнормальному распределению, которое в логарифмическом масштабе относительно случайной переменной (массы изотопной компоненты) тождественно нормальному распределению. Последнее означает, что параметры двумерного нормального распределения относительно соответствующих изотопных компонент аэрозольных частиц-мультифракталов, измеренных в различных местах, априори связаны уравнениями прямой и обратной линейной регрессии, экспериментально наблюдаемым следствием которых является линейная (в логарифмическом масштабе) корреляционная зависимость между концентрациями одинаковых изотопных компонент различных экспериментальных спектров концентраций элементов атмосферного аэрозоля.

Здесь необходимо отметить, что степень нашего понимания механизма формирования (вторичных) аэрозолей, которые при агрегации на затравочных центрах (первичные аэрозоли ( $D_p < 1 \mu\text{км}$ )) обнаруживают скейлинговую структуру с вполне определенными характерными масштабами, можно охарактеризовать известной фразой: "...до сих пор мы не знаем, почему кластеры становятся фракталами, но начинаем понимать, как реализуется их фрактальная структура и как их фрактальная размерность связана с физикой процесса" [23]. Последнее позволило показать, что спектр фрактальных размерностей мультифрактала, каковым является мультикомпонентный (по элементам) аэрозоль, всегда предопределяет логнормальный вид статистики, или, иначе говоря, распределения по массе (объему)  $i$ -й компоненты вторичного аэрозоля.

Теоретически показано, как с помощью решения системы нелинейных уравнений, объединяющей первые моменты (среднее и дисперсию) логнормального и нормального

распределений, восстановить мультифрактальную функцию  $f(\alpha)$  и спектр фрактальных размерностей  $D_q$  отдельной аэрозольной частицы, которые являются глобальными характеристиками генезиса атмосферного (вторичного) аэрозоля и не зависят от локального места регистрации (измерения).

Здесь также считаем необходимым отметить, что результаты настоящей работы позволяют реально подойти к постановке очень важной, на наш взгляд, фундаментальной проблемы аэрозольной динамики и ее применения для глобальной аэрозольной климатологии, которая связана с глобальной атмосферной циркуляцией и жизненным циклом тропосферного аэрозоля [3, 21]. Известно, что поглощаемая Землей солнечная коротковолновая радиация в отдельной точке не компенсируется уходящей длинноволновой радиацией, хотя при этом интегральной тепловой баланс остается постоянным. Последнее поддерживается тем, что избыточная тепловая энергия, получаемая в тропиках, переносится посредством природных транспортных средств – океана и атмосферы – в высокоширотные районы, тем самым обеспечивая стабильный тепловой режим на планете. Очевидно, что использование более широкой, чем имеющаяся сегодня, совокупности данных об элементном и дисперсном составе аэрозолей в различных районах Земли позволит создать своеобразную карту широтного распределения аэрозолей по размерам и массам и тем самым нащупать взаимосвязь между процессами глобальной океан–атмосферной циркуляции и фрактального генезиса аэрозольных частиц, в первую очередь, через удивительную способность последних, обладающих относительно малым временем “жизни” в тропосфере (~10 суток), к дальнему переносу. Если к этому добавить очевидную возможность определения, согласно (7), (24) и (32), широтного распределения затравочных центров, т.е. первичных аэрозолей, то, как нам кажется, на этом пути следует ожидать понимания более глубоких и тонких деталей микрофизики образования и эволюции аэрозоля, так как естественные колебания теплового и динамического режимов Мирового океана и атмосферы весьма значительны и потому должны нетривиальным образом сказываться на динамике образования первичного аэрозоля и соответственно фрактального генезиса вторичного атмосферного аэрозоля.

И, наконец, нужно отметить следующий прагматичный вывод о том, что постоянный мониторинг основных характеристик аэрозолей Южного полюса, как стандарта относительно чистой среды, и крупных городов, как заведомо мощных антропогенных источников загрязнений, позволит установить относительные тенденции изменения химического и дисперсного составов аэрозольных загрязнений, что необходимо как для научно обоснованной санитарно-гигиенической оценки качества среды обитания человека, так и для планирования и разработки стратегии снижения загрязненности воздуха в городах.

## Литература

1. **Maenhaut W.**, Zoller W.H. Determination of the chemical composition of the South Pole aerosol by instrumental neutron activation analysis // *J. Radioanal. Chem.* 1977. V.37. P.637–650.
2. **Пушкин С.Г.**, Михайлов В.А. Компараторный нейтронно-активационный анализ. Изучение атмосферных аэрозолей. Новосибирск: Наука. Сиб. отделение, 1989. 125 с.
3. **Raes F.**, Van Dingenen R., Vignati E., Wilson J., Putaud J.-P., Seinfeld J.H., Adams P. Formation and cycling of aerosols in the global troposphere // *Atmospheric Environment*, 2000. V.34. P. 4215–4240.
4. **Русов В.Д.**, Глушков А.В., Ващенко В.Н. Астрофизическая модель глобального климата Земли. – Киев: Наукова думка, 2003. 212 с.
5. **Figen Var**, Yasushi Narita, Shigeru Tanaka The concentration, trend and seasonal variation of metals in the atmosphere in 16 Japanese cities shown by the results of National Air Surveillance Network (NASN) from 1974 to 1996 // *Atmospheric Environment*, 2000. V.34. P. 2755–2770.

6. **Brownlee K.A.** Statistical theory and methodology in science and engineering. John Wiley & Sons, Inc., New York – London – Sydney, 1965.
7. **Bendat J.S.**, Piersol A.G. Random data. Analysis and Measurement Procedures. A Wiley-Interscience Publication. John Wiley & Sons, Inc., New York–Chichester–Brisbane–Toronto–Singapore, 1986.
8. **Schroeder M.** Fractals, Chaos, Power Laws. Minutes from Infinite Paradise. W.H.Freeman and Company. New York. 2000. 528 p.
9. **Witten T.A.**, Sander L.M. Diffusion-limited aggregation: A Kinetic critical phenomenon // Phys. Rev. Lett. 1981. V.47. P.1400–1403.
10. **Зубарев А.Ю.**, Иванов А.О. Фрактальная структура коллоидного агрегата // Доклады Академии наук (Россия). 2002. Т.383. С.472–477.
11. **Maenhaut W.**, Francos F. and Cafmeyer J. The “Gent” Stacked Filter Unit (SFU) Sampler for Collection of Atmospheric Aerosols in Two Size Fractions: Description and Instructions for Installation and Use // Report No.NAHRES-19, IAEA, Vienna. 1993. P. 249–263.
12. **Hopke P.K.**, Hie Y., Raunemaa T., Biegalski S., Landsberger S., Maenhaut W., Artaxo P., Cohen D. Characterization of the Gent Stacked Filter Unit PM<sub>10</sub> Sampler // Aerosol Science and Technology. 1997. V.27. P. 726–735.
13. **Jacimovic R.**, Lazaru A., Mihajlovic D., Ilic R., Stafilov T. Determination of major and trace elements in some minerals by k<sub>0</sub>-instrumental neutron activation analysis // J. Radioanal. and Nucl. Chem. 2002. V.253. P. 427–434.
14. **HYPERMET-PC V5.0**, User’s Manual, Institute of Isotopes, Budapest, Hungary, 1977.
15. **Kauzero/Solcoi®** for Reactor-neutron Activation Analysis (NAA) Using the k<sub>0</sub>-Standardization Method, DSM Research, Geleen, Netherlands, Dec. 1996.
16. **Crownover R.M.** Introduction to Fractals and Chaos, Jones and Bartlett Publishers. 1995. 350 P.
17. **Mandelbrot B.B.** The fractal geometry of nature, Updated and Augmented, W. H. Freeman and company, New York, 2002.
18. **Feder J.** Fractals. Plenum Press- New York and London. 1988. 259 P.
19. **Божокин С.В.**, Паршин Д.А. Фракталы и мультифракталы. – Ижевск: НИЦ “Регулярная и хаотическая динамика”, 2001. 128 с.
20. **Lai F.S.**, Friedlander S.K., Pich J., Hidy G.M. The self-preserving particle size distribution for Brownian coagulation in the free-molecular regime. Journal of Colloid and Interface Science. 1972. V.39. P.395–405.
21. **Raes F.**, Wilson J., Van Dingenen R. Aerosol dynamics and its implication for the global aerosol climatology. In: Charson R.J., Heintzenberg J. (Eds.), Aerosol Forcing of Climate. Wiley, New York. 1995.
22. **Feller W.** An Introduction to Probability Theory and its Applications. John Wiley & Sons, Inc. New York–London–Sydney–Toronto, 1971. V.2. 752 P.
23. **Боте Р.**, Жюльен Р., Кольб М. Агрегация кластеров. В кн. Фракталы в физике. М.: Мир, 1988. С.353–359.

